LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 3

Problem površine - određeni integral. Leibnitz-Newtonova formula.

Lekcije iz Matematike 2.

3. Problem površine - odredjeni integral. Leibnitz-Newtonova formula.

I. Naslov i objašnjenje naslova

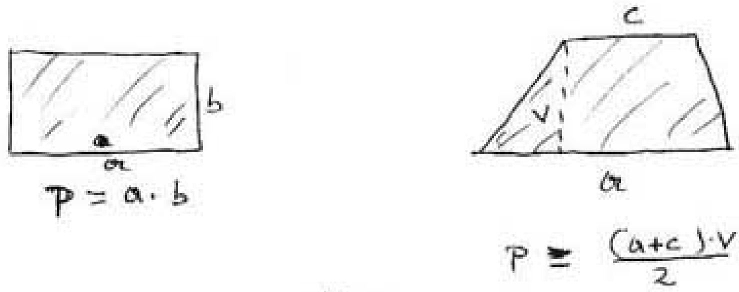
U lekciji se objašnjava kako problem odredjivanja površine podskupova ravnine vodi do pojma odredjenog integrala, te kako se, preko Leibnitz-Newtonove formule, odredjeni integral računa pomoću neodredjenog, tj. pomoću primitivne funkcije.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Formule za površinu geometrijskih likova omedjenih dužinama pronadjene su u dalekoj prošlosti (u starogrčkoj, indijskoj i arapskoj matematici). S likovima omedjenim zakrivljenim crtama bilo je puno teže. Osim formule za površinu kruga, malo toga je bilo poznato; Arhimed je uspijevao s površinama omedjenim dijelovima parabole, hiperbole ili elipse.
Pomoću integrala mogu se, barem načelno, odrediti površine podskupova ravnine, omedjene dijelovima grafova elementarnih funkcija (i općenitije).
Vidjet ćemo da se pomoću integrala rješavaju i mnogi drugi geometrijski problemi (problem obujma, duljine luka krivulje i sl.), te mnogi fizikalni problemi (problem rada sile, težista i sl.).

III. Potrebno predznanje

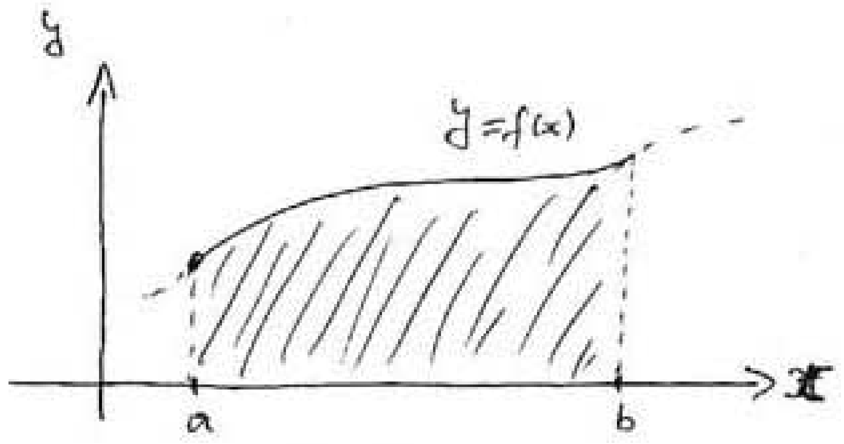
Potrebno je poznavati pojam nedredjenog integrala i računanja nekih važnih neodredjenih integrala.
Takodjer je potrebno poznavanje pojma površine i računanja površine pravokutnika $\mathcal{P} = a \cdot b$ i površine trapeza $\mathcal{P} = \frac{(a+c)v}{2}$ (sl.1).



Sl.1.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Problem odredjivanja površine ispod grafa pozitivne funkcije.
Neka je f pozitivna funkcija na segmentu $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za sve x sa svojstvom $a \leq x \leq b$.
Problem. Treba odrediti površinu omedjenu grafom funkcije f, osi x i vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$ (sl.2).



sl. 2

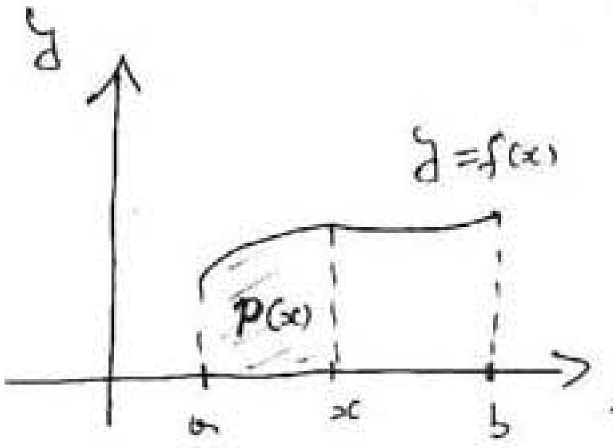
Taj se problem kraće zove **problem odredjivanja površine ispod grafa funkcije**.
Tradicionalno, oznaka za površinu ispod grafa funkcije f, za x od a do b, označava se kao

$$\int_a^b f(x)dx$$

i čita: *integral od a do be ef od x de x.* Taj se izraz zove i **odredjeni integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$. Brojevi a, b zovu se **granice integrala**, f je **podintegralna funkcija**, a je **donja**, a b je **gornja granica**.
Vezu s neodredjenim integralom i uporabu ove oznake vidjet ćemo uskoro.

Ovaj se problem može vrlo precizno matematički postaviti i vrlo precizno riješiti. Mi ćemo izbjeći strogo matematičko izlaganje i prikloniti se geometrijskoj intuiciji. Napomenimo da nas prvenstveno zanimaju elementarne funkcije, iako se ova problematika može razmatrati za puno šire klase funkcija.

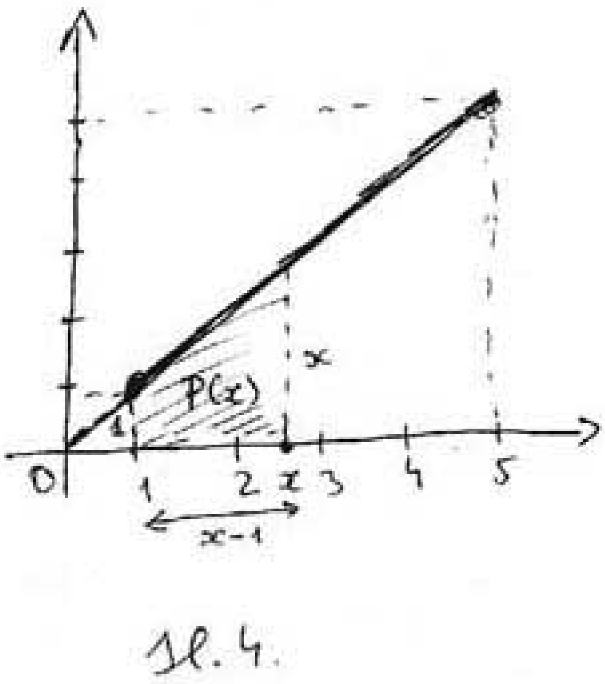
Funkcija površine ispod grafa pozitivne funkcije.
Prirodno je razmotriti funkciju površine $P(x)$ za $a \leq x \leq b$, definiranu kao: $P(x) :=$ površina ispod grafa od a do x (sl.3.).



sl. 3

Vidimo dva očita svojstva:
1. $P(a) = 0$.
2. $P(b) = \mathcal{P} =$ ukupna površina (koju tražimo).

Primjer 1. Odredimo funkciju $P(x)$ ako je $f(x) := x$ i $a = 1$ i $b = 5$ (sl.4.).

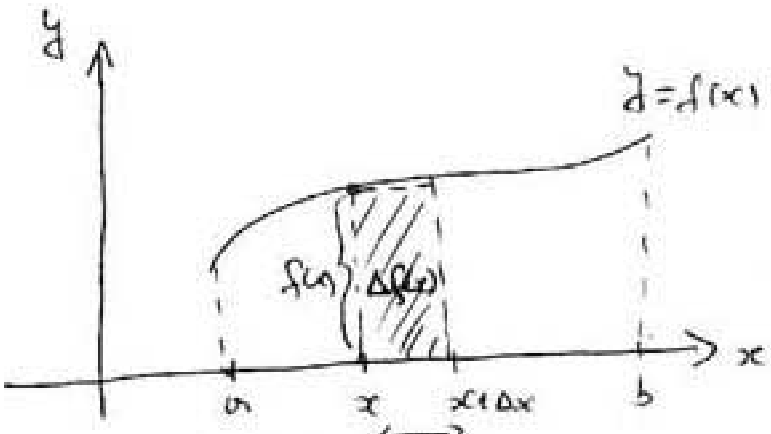


sl. 4.

Vidimo da je:
$P(x) =$ **Površina trapeza, s osnovicama** x **i** 1**, i visinom** $x-1$**.**
Zato je:
$P(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{x^2-1}{2}$**.**
Vrijedi: $P(1) = 0$ **i** $P(5) = 12 = \mathcal{P}$**. Uočimo: kako** x **ide od** 1 **do** 5**, funkcija površine** $P(x)$ **raste od** 0 **do** 12.

Diferencijal površine - $dP(x)$
Na sl.5 vidimo da za prirast površine $\Delta P(x) := P(x+\Delta x) - P(x)$ vrijedi:

$$\Delta P(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$



Sl.5

Odatle naslućujemo:

$$dP(x) = f(x)dx$$

što je formula za diferencijal površine, a možemo je shvatiti kao diferencijalnu vezu izmedju funkcije f i njoj pripadajuće funkcije površine. Ta se veza može zapisati i kao:
$\frac{dP(x)}{dx} = f(x)$, tj. kao $P'(x) = f(x)$,
što znači da je $P(x)$ primitivna funkcija funkcije f.

Uporaba izraza *integral* i oznake $\int$ tradicionalna je. Oznaka $\int$ je iskrivljenje oznake za sumu $\sum$, a suma se odnosi na zamišljanje da se zbrajanjem beskonačno mnogo doprinosa $f(x)dx$ dok se x mijenja (što dolazi od zbrajanja površina $f(x)\Delta x$ i može se strogo matematički opisati pomoću limesa).
Kraće možemo zamišljati:
Zbroj doprinosa $f(x)dx$ **za** x **od** a **do** b **prelazi u** $\int_a^b f(x)dx$.

Primjer 2. - provjera na primjeru da je $P'(x) = f(x)$**.** U Primjeru 1. imali smo: $f(x) := x$ i $P(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Vidimo da je $P'(x) = [\frac{x^2-1}{2}]' = \frac{2x}{2} = x = f(x)$.

Leibnitz-Newtonova formula (za pozitivne funkcije).
Neka je F **bilo koja** primitivna funkcija funkcije f (tj. takva da je $F' = f$).
Tada je:
$P(x) = F(x) + C$, gdje je C neka konstanta (to je zato što je i $P(x)$ primitivna funkcija funkcije f).
Sad je lako odrediti površinu $\mathcal{P}$ u terminima funkcije F:
$\mathcal{P} = P(b) = P(b) - 0 = P(b) - P(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$.
Dakle,

$$\mathcal{P} = F(b) - F(a)$$

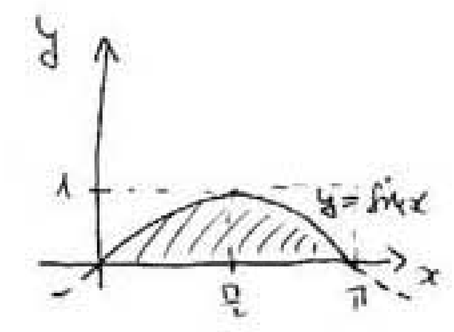
Budući da je $\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$, pišemo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f (razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali).
Izraz $F(b) - F(a)$ često pišemo kao $F(x) \mid_a^b$, dakle:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \mid_a^b$$

Primjer 3. - primjena Leibnitz-Newtonove formule.
Odredimo površinu ispod sinusoide za $0 \leq x \leq \pi$ (sl.6.).



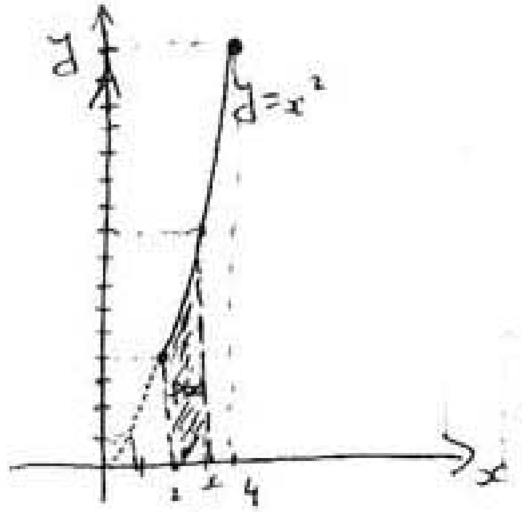
sl. 6

$\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x) \mid_0^\pi = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 2.$

Primjer 4. - izraz za $P(x)$ u ovisnosti o bilo kojoj primitivnoj funkciji F funkcije f
Ako u jednakost $P(x) = F(x) + C$ uvrstimo $x = a$, dobijemo $0 = F(a) + C$, dakle $C = -F(a)$. Zato je

$$P(x) = F(x) - F(a)$$

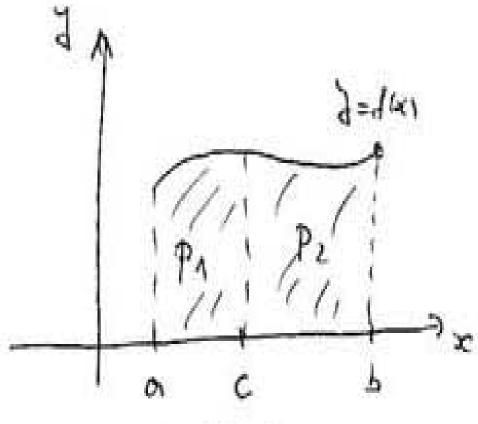
Na primjer, ako je $f(x) := x^2$ i $a = 2$ i $b = 4$, onda je $F(x) = \frac{x^3}{3}$ jedna od primitivnih funkcija od f. Zato je $P(x) = F(x) - F(2) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$ funkcija površine (sl.7.).



Sl.7.

Očita svojstva odredjenog integrala za pozitivne funkcije (sl.8.)

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, za $a < c < b$.



$P = P_1 + P_2$

Sl.8

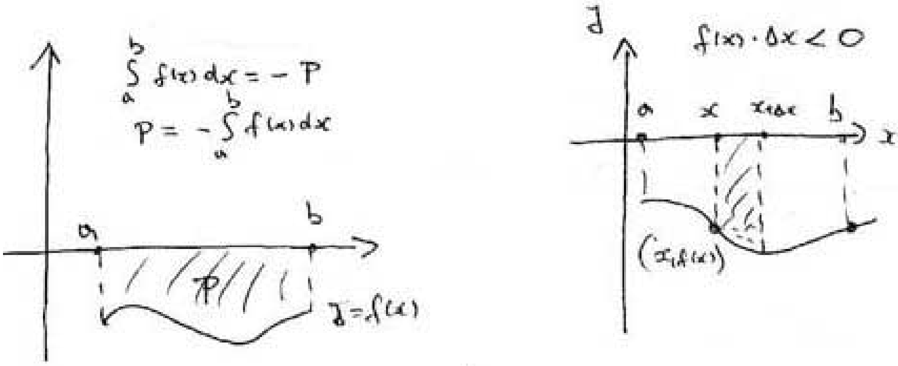
Odredjeni integral za bilo koje funkcije.

1. odredjeni integral za negativne funkcije

Ako je f negativna na segmentu $[a, b]$, tj. ako je $f(x) \leq 0$ za $a \leq x \leq b$, onda **definiramo** (sl.9.):

$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$, tj.

$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{P}$ (u ovom slučaju).

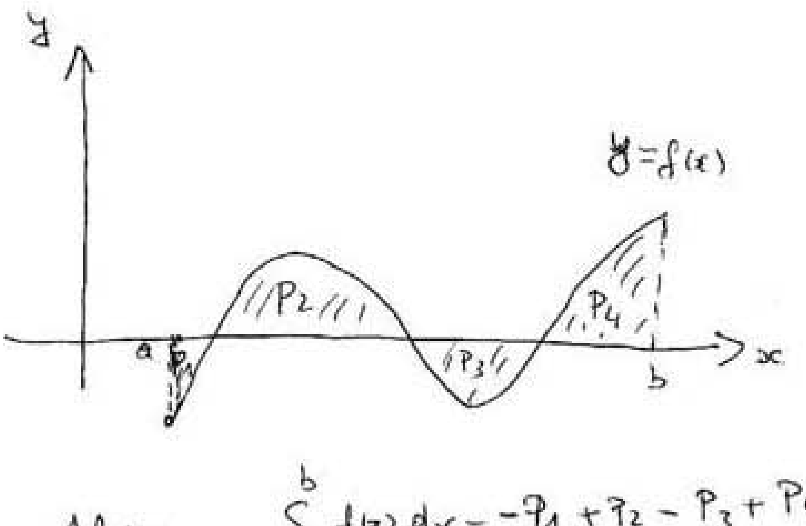


Sl. 9.

Razlog za tu definiciju prirodan: izraz $f(x)\Delta x$ u tom je slučaju negativan za sve x (uz $\Delta x > 0$).

2. Odredjeni integral općenito (sl.10.).

$\int_a^b f(x)dx =$ **Zbroj površina iznad osi** x **- Zbroj površina ispod osi** x**.**



Sl.10 $\quad \int_a^b f(x)\,dx = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4$

Dogovori o odredjenom integralu:
1. dogovor. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. dogovor. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

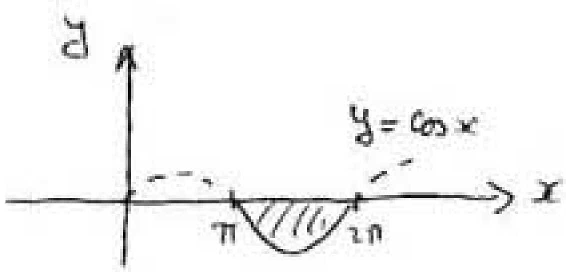
Važno!: Od sad u odredjenom integralu $\int_a^b f(x)dx$, f može biti bilo koja (razumna) funkcija, a granice integrala a, b mogu biti bilo koja dva realna broja.

Još važnije - opća Leibnitz-Newtonova formula.
Za svaki odredjeni integral (bez obzira na funkciju ili granice) vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

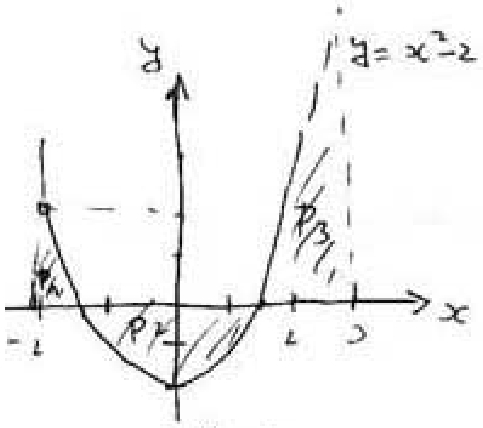
gdje je f bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

Primjer 5. - primjena opće Leibnitz-Newtonove formule.
Izračunajmo i geometrijski interpretirajmo:
(i) $\int_\pi^{2\pi} \sin(x)dx$ (sl.11)



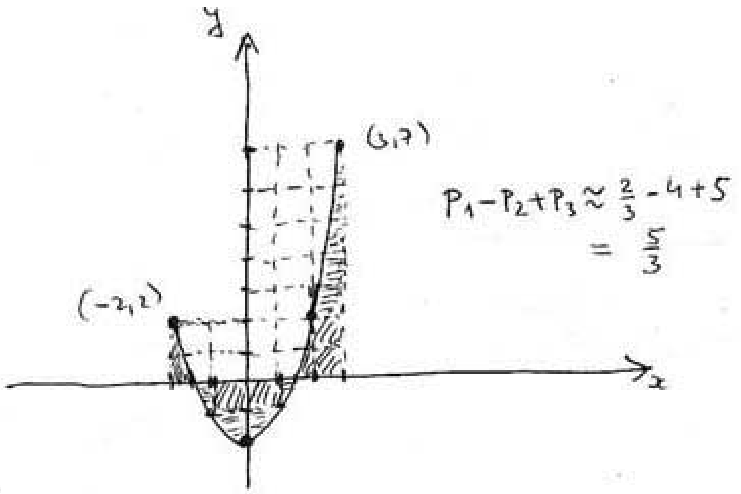
sl. 11

(ii) $\int_{-2}^3 (x^2 - 2)dx$ (sl.12)



sl. 12

(i) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos x|_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - [-\cos\pi] = -1 - [-(-1)] = -2$
Rezultat je negativan jer je krivulja ispod osi x i očekivan (ako uzmemo u obzir Primjer 3.).
(ii) $\int_{-2}^{3}(x^2-2)dx = [\frac{x^3}{3} - 2x]|_{-2}^{3} = 3 - (-\frac{8}{3} + 4) = \frac{5}{3}$. Smisao ovog rezultata jest da je $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = \frac{5}{3}$, što se može i približno provjeriti (sl.13.).



Sl. 13

Napomena o očitim svojstvima integrala.
Ona tri očita svojstva (koja su vrijedila za pozitivne funkcije i u slučaju da je donja granica manja od gornje), vrijede i općenito, i u svojstvu 3. nije potreban uvjet $a < c < b$.
Ta svojstva su izravna posljedica opće Leibnitz-Newtonove formule.

V. Pitanja i zadaci

1. Geometrijski predočite i izračunajte, potom komentirajte rezultat. Jeste li rezultat mogli unaprijed pogoditi?
(i) $\int_0^{2\pi} \cos x dx$.
(ii) $\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$,
(iii) $\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.
(iv) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, gdje je f neka neparna funkcija.
Uputa. (iv) U (iv) je rezultat 0 zbog neparnosti; to se posebno odnosi na (ii) i na (iii), a na neki način i na (i).

2. Obrazložite slikom i riječima jednakost: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ za parnu funkciju f.

3. Odredite i geometrijski interpretirajte funkciju površine ispod grafa funkcije $f(x) = x^2$ za:
(i) $x \geq 0$
(ii) $x \geq -1$
(iii) $x \geq 1$.